1 Көп айнымалы функциялар (бейнелер)

1.1 Көп айнымалы функцияның анықталу облысы (аймағы)

Егер D облысында бір-бірінен тәуелсіз қос (x,y) айнымалыларының әрбір мәніне *z* айнымалысының анықталған бір мәні сәйкес келсе, онда *z* айнымалысы *x* және *y* айнымалыларына байланысты екі айнымалы функция деп аталады және оны

$$z = f(x, y),$$

және тағы да басқа символдардың (ишараттардың) бірімен белгілейді.

$z = f(x,y)$ функциясы анықталатын *x* және *y* мәндерінің қос (x, y) жиынын осы функцияның анықталу облысы деп атайды.

Қарапайым жағдайда, $z = f(x, y)$ функциясының анықталу облысы Oxy жазықтығы, Oxy жазықтығының тұйық сызықтармен шектелген бөлігі немесе осы жазықтықтың бірнеше бөліктерінің жиынтығы болады. $z = f(x, y)$ функциясының Oxy тік бұрышты координаталар жүйесіндегі геометриялық бейнесі (графигі) осы теңдеумен анықталатын бет болып табылады.

Егер бір-бірінен тәуелсіз $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ айнымалыларының әрбір мәніне *u* айнымалысының анықталған бір мәні сәйкес келсе, онда *u* айнымалысы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ айнымалыларына байланысты көп айнымалы функция деп аталады да

$$u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

және тағыда басқа символдардың бірімен белгіленеді.

1-мысал. $z = x^2 + y^2$ функциясының анықталу облысын табу керек.

Шешуі. Берілген функция x пен y-тің кезкелген мәнінде анықталған, яғни анықталу облысы бүкіл Oxy жазықтығы болып табылады.

2-мысал. $z = \ln(2x - y)$ функциясының анықталу облысын табу керек.

Шешуі. Логарифмдік функция $2x - y > 0$, яғни $y < 2x$ болғанда ғана анықталады. Осыдан, функцияның анықталу облысы $2x - y = 0$ түзуінен төмен орналасқан Oxy жазықтығының бөлігі болып табылады.

3-мысал. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}$ функциясының анықталу облысын табу керек.

Шешуі. Фунция нақты мәндерін $x^2 + y^2 - a^2 \geq 0$ немесе $x^2 + y^2 \geq a^2$ болғанда ғана қабылдайды, яғни функцияның анықталу облысы центрі координаталар жүйесінің бас нүктесі, ал радиусы a-ға тең болатын дөңгелектен тыс орналасқан Oxy жазықтығының бөлігі.

4-мысал. $z = \arcsin(y - x)$ функциясының анықталу облысын табу керек.

Шешуі. Берілген функция $-1 \le y - x \le 1$ теңсіздігі орындалғанда ғана анықталады. Осыдан функцияның анықталу облысы $y = x+1$ және $y = x-1$ түзулерінің арасында орналасқан Oxy жазықтығының бөлігі болады.

Берілген функцияларының анықталу облысын табу керек:

1. $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$
2. $z = \arccos \dfrac{x}{y^2}$
3. $z = 2x + 5y$
4. $z = \ln(x + y)$
5. $z = \sqrt{y - x^2}$
6. $z = \ln(xy)$
7. $z = x + \dfrac{3}{y - 5}$
8. $z = \sqrt{y - x^2} + \sqrt{4 - y}$
9. $z = \dfrac{1}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$
10. $z = \sqrt{9 - x^2 - y} + \sqrt{y - x + 3}$

1.2 Көп айнымалы функцияның дербес, толық өсімшелері және дербес туындылары

Oxy жазықтығының *D* облысында анықталған $z = f(x, y)$ функциясын қарастырайық. Мұндағы *x* пен *y*-ті бекітіп алып, x айнымалысына Δx өсімшесін берейік. Сонда x айнымалысы бойынша *z* функциясының $\Delta_x z$ дербес өсімшесі

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \qquad (1)$$

формуласымен (кейіптемесімен) анықталады.

$z = f(x, y)$ функциясындағы *x* пен *y* айнымалыларын бекітіп алып, *y* айнымалысына Δy өсімшесін берсек, онда *y*айнымалысы бойынша дербес өсімшесі

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \qquad (2)$$

формуласымен анықталады.

Егер *x* пен *y* айнымалылары бекітіліп алынып, олар сәйкесінше Δx және Δy өсімшелерін қабылдаса, онда z функциясының толық өсімшесі

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \qquad (3)$$

формуласымен анықталады.

5-мысал. $z = x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x - 5y + 6$

функциясының x және y айнымалылары бойынша дердес өсімшелерін және толық өсімшесін табу керек.

Шешуі. $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y) = \left|(x+\Delta x)^2 - 2(x+\Delta x)\cdot y + 3y^2 + 4(x+\Delta x) - 5y + 6\right| =$

$$= (x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x - 5y + 6) = (x+\Delta x)^2 - x^2 - 2y\Delta x + 4\Delta x =$$

$$= 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 2y\Delta x - 4\Delta x = (2x - 2y - 4 + \Delta x)\cdot \Delta x$$

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = \left|x^2 - 2x\cdot(y+\Delta y) + 3(y+\Delta y)^2 + 4x - 5(y+\Delta y) + 6\right| =$$

$$= (x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x - 5y + 6) = -2x\Delta y + 3(y+\Delta y)^2 - 3y^2 - 5\Delta y =$$

$$= -2x\Delta y + 6y\Delta y + 3(\Delta y)^2 - 5\Delta y = (-2x + 6y - 5 + 3\Delta x)\cdot \Delta x$$

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = \left|(x+\Delta x)^2 - 2(x+\Delta x)\cdot(y+\Delta y) + 3(y+\Delta y)^2 + 4(x+\Delta x) - \right.$$

$$\left. -5(y+\Delta y) + 6\right] - \left(x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x - 5y + 6\right) = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 2x\Delta y - 2y\Delta x - 2\Delta x\Delta y +$$

$$+6y\Delta y + 3(\Delta y)^2 + 4\Delta x - 5\Delta y = (2x - 2y + 4)\Delta x + (-2x + 6y - 5)\Delta y + (\Delta x)^2 - 2\Delta x\Delta y + 3(\Delta y)^2$$

$z = f(x,y)$ функциясының x айнымалысы бойынша дербес туындысы деп

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x,y) \qquad (4)$$

шегін айтады. Бұл жағдайда y-ті тұрақты деп алу керек.

$z = f(x,y)$ функциясының y айнымалысы бойынша дербес туындысы деп

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x,y) \qquad (5)$$

шегін айтады. Бұл жағдайда $\mathbf{x}$-ті тұрақты деп алу керек.

6-мысал. $z = x^2 + 2y^2 - 3xy - 5x + 6y + 4$ функциясының дербес туындысын табу керек.

Шешуі. y-ті тұрақты деп алып,

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 3y - 5$ табамыз.

Осы сияқты, x-ті тұрақты деп алып,

$\frac{\partial z}{\partial y} = 4y - 3x + 6y$ табамыз.

7-мысал. $z = \arcsin(xy^2) + \frac{x}{y^2}$ функциясының дербес туындыларын табу керек.

Шешуі. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-(xy^2)^2}}\cdot y^2 + \frac{1}{y^2} = \frac{y^2}{\sqrt{1-x^2y^4}} + \frac{1}{y^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(xy^2\right)^2}}\cdot 2xy-\frac{2x}{y^3}=\frac{2xy}{\sqrt{1-x^2y^4}}-\frac{2x}{y^2}.$$

8-мысал. Үш айнымалы $u=e^{x^2+y^2+z^2}$ функциясының дербес туындыларын табу керек.

Шешуі. $$\frac{\partial u}{\partial x}=2x\cdot e^{x^2+y^2+z^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2y\cdot e^{x^2+y^2+z^2};\quad \frac{\partial u}{\partial z}=2z\cdot e^{x^2+y^2+z^2}$$

Берілген функциялардың дербес өсімшелерін табу керек:

11. $z=2x^2+xy+y^2$
12. $z=x^3-x^2y+y^2$
13. $z=\frac{y+4}{x-7}$
14. $z=\frac{x+5}{y+8}$
15. $z=\ln\frac{y}{x^2}$
16. $z=y\sin x$

Берілген функциялардың дербес туындыларын табу керек:

17. $z=7x^3y-4xy^5$
18. $z=x^4+5x^2y+7x^2y+7y^2-6x-3y$
19. $z=\frac{y+3}{x+7}$
20. $z=\frac{x}{y-5}$
21. $z=x^2\sin^2 y$
22. $z=arctg\frac{x}{y}$
23. $z=x^8y^5+x^4y^7$
24. $z=\ln\frac{y^3}{x}$
25. $z=\sin\left(x^2+y^2\right)$
26. $z=\cos\left(\frac{x}{y}\right)$
27. $z=\sqrt{x^2+y^2+2x+2y+4}$
28. $z=e^{xy}$
29. $z=x\sqrt{y}+y\sqrt{x}$
30. $z=\frac{x^2}{y^2}+\frac{x}{y}$
31. $z=\sqrt{x}e^{x/y}$
32. $u=\ln\left(x+\frac{y}{2z}\right)$
33. $u=x^{yz}$
34. $u=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$
35. $u=e^{\frac{xy}{z}}$
36. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

1.3 Көп айнымалы функцияның толық дифференциалы.

$z = f(x,y)$ функциясының толық өсімшесі Δz-ті дербес $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ туындылары арқылы

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y \tag{6}$$

түрінде жазуға болады, мұндағы алдыңғы екі қосынды өсімшенің негізгі бөлігі, ал кейінгі екі қосынды қосалқы бөлігі деп аталады. Δx және Δy шамаларымен салыстырғанда қосалқы жоғары ретті ақырсыз аз шама болғандықтан $\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$ ұмтылғанда $\alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y \to 0$.

Толық өсімшенің негізгі бөлігі функцияның толық дифференциалы деп аталып

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \tag{7}$$

арқылы белгіленеді. Мұндағы $dx = \Delta x,\ dy = \Delta y,$ ал $d_x z = \frac{\partial z}{\partial x}dx,\ \ d_y z = \frac{\partial z}{\partial y}dy$ сәйкес x және y айнымалылары бойынша дербес диффееренциалдары деп аталады.

Егер $u = f(x, y, z, \ldots, t)$ көп айнымалы функциясы берілсе, онда оның толық дифференциалы

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \ldots + \frac{\partial u}{\partial t}dt \tag{8}$$

формуласымен анықталады.

$\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$-ң аз мәнінде дифференциалданатын $z = f(x,y)$ функциясы үшін төмендегі жуықтап есептеу формуласы қолданылады.

$\Delta z \approx dz$ осыдан

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y \tag{9}$$

9-мысал. $z = x^2 + xy^2 + \sin y$ функциясының толық дифференциалын табу керек.

Шешуі. Дербес туындыларын табайық.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + \cos y$$

Осыдан

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = \left(2x + y^2\right)dx + \left(2xy + \cos y\right)dy.$$

10-мысал. $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ функциясының толық дифференциалын табу керек.

Шешуі.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Осыдан

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = \frac{2xdx + 2ydy + 2zdz}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

11-мысал. $\sqrt{4{,}03^2 + 2{,}98^2}$ санының жуық мәнін табу керек.

Шешуі. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ функциясын қарастырайық.

$x + \Delta x = 4{,}03$ осыдан $x = 4,\ \Delta x = 0{,}03;$

$y + \Delta y = 2{,}98$ осыдан $y = 3,\ \Delta y = -0{,}02;$

$$z = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{4}{5}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{3}{5};$$

$$\sqrt{4{,}03^2 + 2{,}98^2} \approx z + \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y = 5 + \frac{4}{5}\cdot 0{,}03 + \frac{3}{5}\cdot(-0{,}02) = 5{,}012.$$

Берілген функциялардың толық дифференциалдарын табу керек:

37. $z = x^2 + 5xy + 6y^2$

38. $z = \dfrac{y-4}{x+5}$

39. $z = \ln(xy)$

40. $z = 7x^3y - 4xy^5$

41. $z = \dfrac{x-1}{y+2}$

42. $z = e^{x^2+y^2}$

43. $z = \arcsin\dfrac{x}{y}$

44. $z = \sqrt{3x^2 + 4y^2 + 2x + y}$

45. $u = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x}$

46. $z = \sqrt{z}\cdot\sin\dfrac{y}{x}$

47. $(1{,}02)^{3{,}01}$ санын жуықтап есептеу керек.

48. $2{,}03^3 \cdot 3{,}98^2$ санын жуықтап есептеу керек.

49. $2\cdot e^{0{,}015} + \cos(1{,}55)$ санын есептеу керек.

50. $arctg\frac{1,02}{0,95}$ санын есептеу керек.

1.4 Көп айнымалы функциялардың жоғары ретті дербес туындылары мен дифференциалдары

$z=f(x,y)$ функциясының екінші ретті дербес туындысы деп осы функцияның дербес туындысының дербес туындысын айтады және оны былай белгілейді:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y);\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y);\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y)$$

(10)

Осылай үшінші және жоғары ретті дербес туындылары табылады:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=f'''_{xxx}(x,y)$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=f'''_{xxy}(x,y)$$

(11)

және т.с.с.

$z=f(x,y)$ функциясы және оның $f'_x(x,y), f'_y(x,y), f''_{xy}(x,y), f''_{yx}(x,y)$ дербес туындылары D облысында анықталған және үзіліссіз болса, онда осы облыста “аралас” туындылары тең болады:

$$f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$$

(12)

$z=f(x,y)$ функциясының екінші ретті дифференциалы деп осы функцияның дифференциалының дифференциалын айтады:

$$d^2z=d(dz)$$

(13)

Осы сияқты үшінші және жоғары ретті дифференциалдары анықталады:

$$d^3z=d(d^2z),\dots,d^nz=d(d^{n-1}z)$$

(14)

Егер x және y бір – бірінен тәуелсіз айнымалылар, ал $f(x,y)$ функциясының үзіліссіз дербес туындылары бар болса, онда жоғары ретті дифференциалдар

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2,$$

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3,$$

……………………………………………………………………………

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z \qquad (15)$$

формулаларымен анықталады.

12-мысал. $z = x^3 + 5x^2y - 4y^3 - x^2 - 6xy + 3y^2$ функциясының екінші ретті дербес туындыларын және екінші ретті дифференциалын табу керек.

Шешуі**.** Алдымен дербес туындыларын табайық:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 10xy - 2x - 6y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 5x^2 - 12y^2 - 6x + 6y.$$

Енді

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 6x + 10y - 2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -24y + 6,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 10x - 6,$$

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 = (6x + 10y - 2)dx^2 +$$

$$+ 2(10x - 6)dxdy + (-24y + 6)dy^2.$$

Берілген функциялардың екінші ретті дербес туындыларын табу керек:

51. $z = 4x^3 - 6xy^2 + 5y^3$

52. $z = x^4 + 5x^2y^2 + 4y^4$

53. $z = x^4y^7 + x^5y^8$

54. $z = \dfrac{y-2}{x+1}$

55. $z = \sin(x^2 + y^2)$

56. $z = \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{x}{y}$

57. $z = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$

58. $z = e^{xy}$

59. $z=\ln(2x+5y)$

60. $z=\ln\frac{x}{y}$

Берілген функциялардың екінші ретті дифференциалдарын табу керек:

61. $z=x^3+5x^2y+2y^3+7xy^2$

62. $z=x^4y^7$

63. $z=\cos(3x+4y)$

64. $z=\sqrt{x^2+y^2}$

65. $z=\ln(x^2+y^2)$ функциясының $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ теңдеуін қанағаттандыратындығын дәлелдеу керек.

66. Екі рет дифференциалданатын кез келген $z=\varphi(y+ax)+\psi(y-ax)$ функциясының $a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ теңдеуін қанағаттандыратындығын дәлелдеу керек.

67. $u=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$ функциясының $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ теңдеуін қанағаттандыратындығын дәлелдеу керек.

68. $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ функциясының $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ теңдеуін қанағаттандыратындығын дәлелдеу керек.

1.5 Күрделі функцияны дифференциалдау

Дифференциалданатын $z=F(u,v)$ функциясы берілсін, мұнда $u=u(x,y),\ v=v(x,y)$. Бұл күрделі $z=F(u(x,y),v(x,y))$ функциясының дербес туындылары

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (16)$$

формулаларымен есептеледі.

Дифференциалданатын $z=f(x,y)$ функциясы берілсін, мұнда $x=x(t),\ y=y(t)$. Бұл күрделі $z=f(x(t),\ y(t))$ функциясының t бойынша туындысы

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

(17)

формуласымен есептеледі.

Дифференциалданатын $z=f(x,y)$ функциясы берілсін, мұнда $y=y(x)$. Бұл $z=f(x,\ y(x))$ функциясының x бойынша туындысы

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} \qquad (18)$$

формуласымен есептеледі.

13-мысал. $z=\cos(u^2+\sqrt{v})$ функциясының, мұндағы $u=e^{xy},\ v=x^2+y^2$, дербес туындыларын табу керек.

Шешуі.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=-\sin(u^2+\sqrt{v})\cdot 2u\cdot u'_x-\sin(u^2+\sqrt{v})\cdot\frac{1}{2\sqrt{v}}\cdot v'_x=$$

$$=-\left(2uye^{xy}+\frac{x}{\sqrt{v}}\right)\sin(u^2+\sqrt{v}).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-\sin(u^2+\sqrt{v})\cdot 2u\cdot u'_y-\sin(u^2+\sqrt{v})\cdot\frac{1}{2\sqrt{v}}\cdot v'_y=$$

$$=-\left(2uxe^{xy}+\frac{y}{\sqrt{v}}\right)\sin(u^2+\sqrt{v}).$$

14-мысал. $z=x^2+\sqrt{y}$ функциясы берілген, мұндағы $x=\operatorname{tg}t$, $y=t^2+3t+5\cdot$ $\frac{dz}{dt}$ туындысын табу керек.

Шешуі.

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}=2x\frac{1}{\cos^2 t}+\frac{1}{2\sqrt{y}}(2t+3)=\frac{2\sin t}{\cos^3 t}+\frac{2t+3}{2\sqrt{t^2+3t+5}}.$$

15-мысал. $z=x^3+\sin(xy^2)$ функциясы берілген, мұндағы $y=\sqrt{x^2+1}\cdot$ $\frac{dz}{dx}$ туындысын табу керек.

Шешуі. $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+y^2\cos(xy^2),\ \frac{\partial z}{\partial y}=2xy\cos(xy^2),\ \frac{dy}{dx}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$

Осыдан

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}=3x^2+y^2\cos(xy^2)+\frac{2x^2y\cos(xy^2)}{\sqrt{x^2+1}}.$$

69. $z = e^{u-2v}$ функциясы берілген, мұндағы $u = \sin x,\ \ v = x^3 - y^2 \cdot \frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ дербес туындыларын табу керек.

70. $z = \sqrt{u^2 + v^2}$ функциясы берілген, мұндағы $u = x \cdot \sin y,\ v = y \cdot \cos x \cdot \frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ дербес туындыларын табу керек.

71. $z = \ln(u^2 + v)$ функциясы берілген, мұндағы $u = y \cdot \arcsin x,\ v = xe^y \cdot \frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ дербес туындыларын табу керек.

72. $z = \sin(uv)$ функциясы берілген, мұндағы $u = 2x + 3y,\ v = xy^2 \cdot \frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ дербес туындыларын табу керек.

73. $z = e^{4x-5y}$ функциясы берілген, мұндағы $x = \sin t,\ \ y = t^3 \cdot \frac{dz}{dt}$ туындысын табу керек.

74. $z = x^y$ функциясы берілген, мұндағы $x = arctg\, t,\ \ y = t^2 + 1 \cdot \frac{dz}{dt}$ туындысын табу керек.

75. $z = \arccos\frac{x}{y}$ функциясы берілген, мұндағы $x = t^2 + 1,\ \ y = t^3 + 1 \cdot \frac{dz}{dt}$ туындысын табу керек.

76. $z = \sqrt{x^2 + y + 5}$ функциясы берілген, мұндағы $x = \ln t,\ \ y = t^2 \cdot \frac{dz}{dt}$ туындысын табу керек.

77. $z = tg\left(x^2 - y^2\right)$ функциясы берілген, мұндағы $y = \sin\ x \cdot \frac{dz}{dx}$ туындысын табу керек.

78. $z = \arcsin\left(x^2 + y^2\right)$ функциясы берілген, мұндағы $y = x^2 + 2x + 5 \cdot \frac{dz}{dx}$ туындысын табу керек.

79. $z = e^{x^2 + \sqrt{y}}$ функциясы берілген, мұндағы $y = \ln\ x \cdot \frac{dz}{dx}$ туындысын табу керек.

80. $z = \sqrt{x^3 + y^3}$ функциясы берілген, мұндағы $y = e^x \cdot \frac{dz}{dx}$ туындысын табу керек.

1.6 Айқындалмаған функциялардың туындысы

$F(x,y)=0$ теңдеуі түрінде берілген айқындалмаған $y=y(x)$ функциясының туындысы

$$y'=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$$

формуласымен анықталады, мұндағы $F(x,y)$ функциясы x және y айнымалылары бойынша дифференциалданатын әрі $\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$ функция.

$F(x,y,z)=0$ теңдеуі түрінде берілген айқындалмаған $z=z(x,y)$ функциясының x және y айнымалылары бойынша дербес туындылары

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)};\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} \qquad (19)$$

формулаларымен анықталады, мұндағы $F(x,y,z)$ функциясы x,y және z айнымалылары бойынша дифференциалданатын әрі $\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$ функция.

17-мысал. $x^2+2xy+3y^2+4x+5y+6=0$ функциясы берілген. $\frac{dy}{dx}$ туындысын табу керек.

Шешуі. $F(x,y)=x^2+2xy+3y^2+4x+5y+6$,

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x+2y+4,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=2x+6y+5$$

Осыдан

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x+2y+4}{2x+6y+5}.$$

18-мысал. $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$ функциясы берілген. $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ туындыларын табу керек.

Шешуі. $F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$,

$$\frac{\partial F}{\partial x}=3x^2-3yz,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=3y^2-3xz,\quad \frac{\partial F}{\partial z}=3z^2-3xy$$

Осыдан

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{3x^2-3yz}{3z^2-3xy}=\frac{x^2-yz}{xy-z^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{3y^2-3xz}{3z^2-3xy}=\frac{y^2-xz}{xy-z^2}$$

Айқындалмаған $y=y(x)$ функциясының туындысын табу керек:

81. $x\sin y + y\cos x = 0$

82. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

83. $x^3+y^3-2xy^2=1$

84. $y^2=2px$

85. $x^2+y^2-\sin(xy)=0$

86. $\frac{y}{x}+e^{xy}=0$.

Айқындалмаған $z=z(x,y)$ функциясының x және y айнымалылары бойынша дербес туындыларын табу керек:

87. $x^2+y^2+z^2+3xy+z=0$

88. $x^2+2y^2+3z^2+x+5yz=0$

89. $\sqrt{z}\sin xy+x+y=0$

90. $xyz+\ln(x+y+z)=0$

91. $x\sin y+y\sin z+z\sin x=0$

92. $e^z-xyz-x-y=0$.

1.7 Бетке жүргізілген жанама жазықтық және нормаль(тіктеме) түзу

Қарастырылатын σ беті $z=f(x,y)$ теңдеуімен берілсін. Беттің бойынан $M_0(x_0,y_0,z_0)$ нүктесін алайық. Осы нүктеде $f(x,y)$ функциясы дифференциалданатын болсын.

Беттің M_0 нүктесі арқылы өтетін барлық қисықтарға жүргізілген жанамалардан тұратын жазықтықты жанама жазықтық дейді. Оның теңдеуі

$$z-z_0=(x-x_0)\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} \quad (20)$$

M_0 нүктесі арқылы өтетін және жанама жазықтыққа перпендикуляр болатын түзуді беттің нормалі дейді. Оның теңдеуі

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}}=\frac{z-z_0}{-1} \quad (21)$$

Егер σ беті $F(x,y,z)=0$ теңдеуімен берілсе, онда $M_0(x_0,y_0,z_0)$ нүктесіндегі жанама жазықтықтың теңдеуі

$$(x-x_0)\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}+(z-z_0)\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}=0, \quad (22)$$

ал нормальдің теңдеуі

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}}$$

(23)

19-мысал. $z=1+x^2+y^2$ функциясының $M_0(1;2;3)$ нүктесіндегі жанама жазықтығының және нормалінің теңдеулерін жазу керек.

Шешуі. $\frac{\partial z}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=2y.$ $M_0(1,2,3)$ нүктесінде

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=4.$$

Осыдан жанама жазықтығының теңдеуі

$z-3=2(x-1)+4(y-2)$ немесе $2x+4y-z-7=0,$

ал нормалінің теңдеуі

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{-1}.$$

20-мысал. $2x^2+y^2+3z^2-x-4y+5z=0$ функциясының $M_0(2;1;-1)$ нүктесіндегі жанама жазықтығының және нормаль түзуінің теңдеулерін жазу керек.

Шешуі. $\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}=(4x-1)|_{M_0}=7;\quad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}=(2y-4)|_{M_0}=-2;\quad \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}=(6z+5)|_{M_0}=-1.$

Осыдан жанама жазықтығының теңдеуі

$$7(x-2)-2(y-1)-(z+1)=0$$

немесе $7x-2y-z-13=0$, ал нормаль түзуінің теңдеуі

$$\frac{x-2}{7}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{-1}.$$

Берілген σ беттерінің $M_0(x_0,y_0,z_0)$ нүктелеріндегі жанама жазықтықтарының және тіктемелерінің теңдеулерін жазу керек:

93. $z=\frac{x^2-y^2}{2},\qquad M_0(3,1,4)$

94. $z=x^2+2xy+3y^2,\qquad M_0(-1,1,2)$

95. $z=2x^2+y^2-4xy,\qquad M_0(2,1,-3)$

96. $z = x^2 + 2y^2 + 4xy - 5y - 10, \qquad M_0(-7,1,8)$

97. $3x^2 - y^2 + z^2 + xy + yz = 0, \qquad M_0(0,2,1)$

98. $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0, \qquad M_0(1,2,-1)$

99. $x^2 + z^2 - 5yz + 3y = 46, \qquad M_0(1,2,-3)$

100. $x^2 + y^2 - z^2 - 2xz + 2x - z = 0, \qquad M_0(1,1,1)$

1.8 Екі айнымалы функцияның экстремумы

D аймағында анықталған $z = f(x,y)$ функциясы берілсін. Осы аймақта жататын $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінің маңайында жататын барлық $M(x,y)$ нүктелерінде $f(x_0,y_0) > f(x,y)$ $\left(f(x_0,y_0) < f(x,y)\right)$ теңсіздігі орындалса, онда $z = f(x,y)$ функциясы M_0 нүктесінде максимум (минимум) мәнін қабылдайды. "Максимум" және "минимум" мәндері экстремум мәндері деп аталады. Үш және одан көп айнымалылардың функцияларының экстремумдарыда осылайша анықталады. Кез келген дифференциалданатын екі айнымалы функция экстремум мәндерін тек оның барлық дербес туындылары нөлге тең болатын нүктелерде ғана қабылдайды. Мұндай нүктелер стационарлық (тұрақты) нүктелер деп аталады. Мысалы, дифференциалданатын $z = f(x,y)$ функциясының стационарлық нүктесі $M_0(x_0,y_0)$

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases} \tag{24}$$

жүйесін шешу арқылы анықталады. (24) – шарт $z = f(x,y)$ функциясының экстремум мәндерін қабылдауының қажеттілік шарты болып табылады. Яғни стационарлық нүктелердің барлығы бірдей экстремум нүктелері бола бермейді. Сондықтан олардың әрқайсы төмендегі функцияның экстремум мәндерін қабылдауының жеткілікті шартын қанағантандыру керек. $M_0(x_0, y_0)$ нүктесі $z = f(x,y)$ функциясының стационар нүктесі болсын.

$$A = f''_{xx}(x_0,y_0), \; B = f''_{xy}(x_0,y_0), \; C = f''_{yy}(x_0,y_0)$$

$$\Delta = AC - B^2$$

(25)

деп белгілейік. Егер стационарлық $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінде:

а) $\Delta > 0$ және $A > 0$ болса, онда M_0 минимум нүктесі болады,

$\Delta > 0$ және $A < 0$ болса, онда M_0 максимум нүктесі болады;

б) $\Delta < 0$ болса, онда M_0 нүктесінде экстремум болмайды;

в) $\Delta = 0$ болса, онда бұл нүктеде экстремум болуы да болмауы да мүмкін.

21-мысал. $z = 2x^2 - xy + 3y^2 - 5x + 7y$ функциясын экстремумге зерттеу керек.

Шешуі**.** Бірінші ретті дербес туындылары

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x - y - 5, \ \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 6y + 7$$

болады, осыдан

$$\begin{cases} 4x - y - 5 = 0 \\ -x + 6y + 7 = 0 \end{cases}$$

теңдеулер жүйесінің шешімі $x = 1, \ y = -1$. $M(1,-1)$ нүктесіндегі екінші ретті дербес туындылары

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4; \ B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1; \ C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6$$

болады. Сонымен

$$\Delta = AC - B^2 = 4 \cdot 6 - (-1)^2 = 23 > 0, \quad A > 0.$$

Яғни $M(1,-1)$ нүктесінде берілген функция минимум мәнін қабылдайды және ол

$$z_{\min} = z(M) = -6$$

болады.

22-мысал. $z = x^3 + y^3 - 3axy$ функциясын экстремумге зерттеу керек ($a > 0$).

Шешуі**.**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3ay = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3ax = 0 \end{cases}$$

теңдеулер жүйесінің шешімі

$$x_1 = a, \ y_1 = a \text{ және } x_2 = 0, \ y_2 = 0.$$

Екінші ретті дербес туындысын табайық.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3a, \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

$M_1(a, a)$ нүктесінде

$$A = 6a, \ B = -3a, \ C = 6a, \ \Delta = AC - B^2 = 36a^2 - 9a^2 = 27a^2 > 0, \ A > 0.$$

Яғни $M_1(a,a)$ нүктесінде берілген функция минимум мәнін қабылдайды және ол $z_{\min} = -a^3$ тең болады. $M_2(0,0)$ нүктесінде

$$A = 0,\ B = -3a,\ C = 0,\ \Delta = AC - B^2 = -9a^2 < 0.$$

Яғни $M_2(0,0)$ нүктесінде экстремум жоқ.

Берілген функцияларды экстремумге зерттеу керек:

101. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$
102. $z = 4x - 2y - x^2 - y^2$
103. $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$
104. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$
105. $z = x^2 - y^2 + 5xy + 6$
106. $z = 3xy - x^2y - xy^2$.

1.9 Шартты эктремум. Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері

$z = f(x,y)$ функциясының шартты экстремумы деп осы функцияның, x және y айнымалыларының $\varphi(x,y) = 0$ теңдеуімен байланысты болған жағдайдағы экстремум мәнін айтады. Мұндағы $\varphi(x,y) = 0$ теңдеуі байланыс теңдеуі деп аталады.

Шартты экстремумды табу үшін Лагранж функциясы деп аталатын $u(x,y) = f(x,y) + \lambda\cdot\varphi(x,y)$ функциясының экстремумын табу жеткілікті, мұндағы λ - анықталмаған тұрақты көбейткіш.

Лагранж функциясының экстремумының бар болуының қажетті шарты:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x,y) = 0. \end{cases} \tag{26}$$

Осы үш теңдеуден тұратын жүйеден x, y және λ мәндерін табуға болады.

D тұйық облысында $z = f(x,y)$ функциясының ең үлкен M және ең кіші m мәндерін табу үшін:

а) D облысының ішінде жатқан барлық стационарлық нүктелерді тауып, осы нүктелердегі функцияның мәндерін есептеу керек (бұл нүктелерде экстремум мәндерінің болуын не болмауын тексерудің қажеті жоқ).

б) D облысының шекарасында функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табу керек.

в) Барлық табылған мәндердің ең кішісін (бұл ең кіші мән) және ең үлкенін (бұл ең үлкен мән) таңдап аламыз.

23-мысал. $z = x^2 - y^2$ функциясының байланыс теңдеуі $2x - y - 6 = 0$ берілген жағдайдағы шартты экстремумын табу керек.

Шешуі. Лагранж функциясын қарастырайық:

$$u = x^2 - y^2 + \lambda(2x - y - 6).$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y - \lambda = 0, \\ 2x - y - 6 = 0 \end{cases}$$

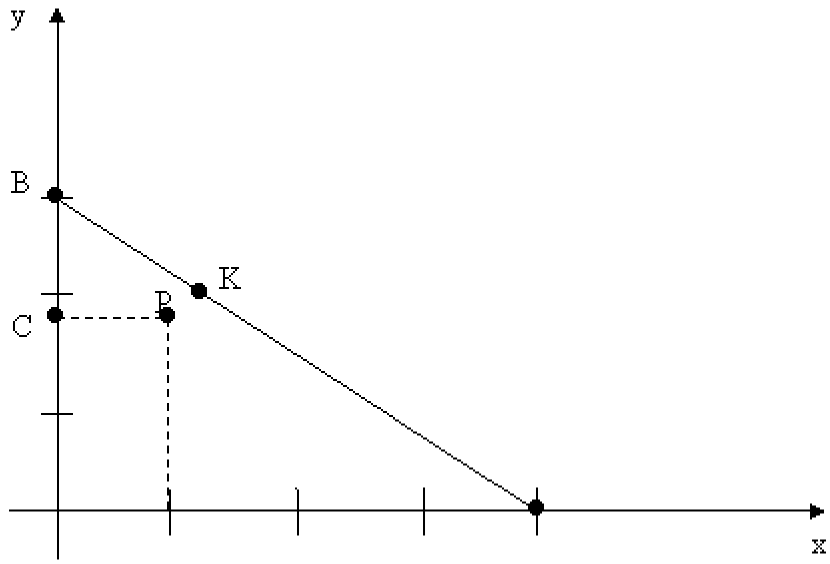
жүйесінен $\lambda = -4, x = 4, y = 2$ мәндері табылады. Осыдан $M(4,2)$ нүктесінде $z = x^2 - y^2$ функциясы шартты максимум мәнін қабылдайды және ол $z_{\max} = 12$ болады.

24-мысал. $z = 3x^2 - xy + 2y^2 - 4x - 7y + 10$ функциясының $x = 0$, $y = 0$, $3x + 4y = 12$ сызықтарымен шектелген тұйық D облысындағы (аймағындағы) ең үлкен және ең кіші мәндерін табу керек.

Шешуі**.** Стационар (тұрақты) M нүктесін табайық.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 6x - y - 4 = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -x + 4y - 7 = 0. \end{cases}$$

Осы жүйеден $x = 1, y = 2.$ $P(1,2)$ нүктесі D облысының ішінде жатыр. $z(P) = z(1,2) = 1.$



A

N

0

1 – сурет

Енді берілген функцияны D облысының шекарасында зерттейік. Облыс шекарасы *OA, AB* және *OB* кесінділерінен тұрады:

1) *OA* бөлігінде $y = 0,\ 0 \le x \le 4,$ осыдан $z = 3x^2 - 4x + 10,\ z'_x = 6x - 4 = 0,$

$$x = \frac{2}{3} \in [0,4], \quad N(\frac{2}{3},0), \quad z(N) = 8\frac{2}{3};$$

OA кесіндісінің шеткі нүктелерінде $z(0) = z(0,0) = 10$, $z(A) = z(4,0) = 42;$

2) *OB* бөлігінде $x = 0,\ 0 \le y \le 3$, осыдан $z = 2y^2 - 7y + 10,\ z'_y = 4y - 7,$

$$y = \frac{7}{4} \in [0,3], \quad C(0;\frac{7}{4}), \quad z(C) = 4\frac{7}{8};$$

OB кесіндісінің шеткі нүктелерінде $z(0) = 10,\ z(B) = z(0,3) = 7;$

AB бөлігінде $y = \frac{3}{4}(4 - x),\ 0 \le x \le 4,$

$$z = 3x^2 - \frac{3}{4}x(4-x) + \frac{9}{8}(4-x)^2 - 4x - \frac{21}{4}(4-x) + 10$$

немесе $z = \frac{39}{8}x^2 - \frac{43}{8}x + 7,\ z'_x = \frac{39}{4}x - \frac{43}{4} = 0,\ x = \frac{43}{39} = 1\frac{4}{39} \in [0,4]$, $y = 2\frac{9}{52}$

, $K(1\frac{4}{39};2\frac{9}{52}), \quad z(K) = 1\frac{23}{312};$

AB кесіндісінің шеткі нүктелеріндегі мәндері белгілі.

Табылған $z(P), z(N), z(K), z(C), z(0), z(A), z(B)$ мәндерін салыстыра отырып, z функциясының D облысындағы ең үлкен мәні $M = z(A) = 42,$ ал ең кіші мәні $m = z(P) = 1$ болатындығын анықтаймыз.

107. $z = x^2 + y^2$ функциясының байланыс теңдеуі $3x + 4y = 12$ берілген жағдайдағы шартты экстремумын табу керек.

108. $z = 3x + 4y$ функциясының байланыс теңдеуі $x^2 + y^2 = 25$ берілген жағдайдағы шартты экстремумын табу керек.

Берілген $z = f(x,y)$ функциясының берілген сызықтармен шектелген D облысында ең үлкен және ең кіші мәндерін табу керек:

109. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y + 4 \qquad D:\ x = 0,\ y = 0,\ x + y + 3 = 0$

110. $z = xy - y^2 + 3x + 4y - 2 \qquad D:\ x = 0,\ y = 0,\ x + y - 1 = 0$

111. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y + 5$ $\quad D:\ x = 2,\ y = 0,\ y = x + 2$

112. $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 4$ $\quad D:\ x = -3,\ y = 0,\ x + y + 1 = 0$

113. $z = 0{,}5x^2 - xy + 8$ $\quad D:\ y = 8,\ y = 2x^2$

114. $z = 2x^2 + 3y^2 + 6$ $\quad D:\ y = \sqrt{9 - \frac{9}{4}x^2},\ y = 0$